4/30 機械学習勉強会 担当：石井 ①

4章 誤差逆伝播法

勾配降下法での重み更新

$\nabla E = \frac{\partial E(w)}{\partial w}$ を計算したい

4.1

$E_n = \frac{1}{2}\|y(x_n) - d_n\|^2$ のとき

$\frac{\partial E_n}{\partial w_{ji}^{(l)}} = (y(x_n) - d_n)^T \frac{\partial y}{\partial w_{ji}^{(l)}}$

$$\begin{aligned} y(x) &= f(u^{(L)}) \\ &= f(W^{(L)} z^{(L-1)} + b^{(L)}) \\ &= f(W^{(L)} f(W^{(L-1)} z^{(L-2)} + b^{(L-1)}) + b^L) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

計算量が多い

⇒ 誤差逆伝播法

4.2 2層ネットワーク

◦ 出力層の重み

$E_n = \frac{1}{2}\|y(x) - d\|^2 = \frac{1}{2}\sum_j (y_j(x) - d_j)^2$

活性化関数：恒等写像

出力：$y_j(x) = z_j^{(3)} = u_j^{(3)} = \sum_i w_{ji}^{(3)} z_i^{(2)}$ (4.3)

式(4.4)まで

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial w_{ji}^{(3)}} &= (y(x) - d)^T \frac{\partial y}{\partial w_{ji}^{(3)}} \\ &= (y(x) - d)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_i^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (y_j(x) - d_j) z_j^{(2)} \end{aligned}$$

j成分

◦ 中間層の重み 式(4.5)～

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial w_{ji}^{(2)}} &= \frac{\partial E_n}{\partial u_j^{(2)}} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial w_{ji}^{(2)}} \\ &= \frac{\partial E_n}{\partial u_j^{(2)}} \frac{\partial}{\partial w_{ji}^{(2)}} \sum_i w_{ji}^{(2)} z_i^{(1)} \\ &= \frac{\partial E_n}{\partial u_j^{(2)}} z_i^{(1)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial u_j^{(2)}} = \sum_k \frac{\partial E_n}{\partial u_k^{(3)}} \frac{\partial u_k^{(3)}}{\partial u_j^{(2)}}$$

$$\frac{\partial u_k^{(3)}}{\partial u_j^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial u_j^{(2)}} \left(\sum_j w_{kj}^{(3)} f(u_j^{(2)}) \right) = w_{kj}^{(3)} f'(u_j^{(2)})$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial u_k^{(3)}} = \frac{\partial}{\partial u_k^{(3)}} \left(\frac{1}{2} \sum_k (y_k(x) - d_k)^2 \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_k^{(3)}} \left(\frac{1}{2} \sum_k (u_k^{(3)} - d_k)^2 \right)$$

$$= u_k^{(3)} - d_k$$

3層目がわかれば
2層目が計算できる.

$$\therefore \frac{\partial E_n}{\partial w_{ji}^{(2)}} = \left(f'(u_j^{(2)}) \sum_k w_{kj}^{(3)} (u_k^{(3)} - d_k) \right) z_i^{(1)} \qquad (4.8)$$

4.3 多層ネットワーク 一般化

l層の重み $w_{ji}^{(l)}$ について

$$\frac{\partial E_n}{\partial w_{ji}^{(l)}} = \frac{\partial E_n}{\partial u_j^{(l)}} \frac{\partial u_j^{(l)}}{\partial w_{ji}^{(l)}}$$

$$\frac{\partial u_j^{(l)}}{\partial w_{ji}^{(l)}} = \frac{\partial}{\partial w_{ji}^{(l)}} \sum_i w_{ji}^{(l)} z_i^{(l-1)} = z_i^{(l-1)}$$

$$\underbrace{\frac{\partial E_n}{\partial u_j^{(l)}}}_{\delta_j^{(l)}} = \sum_k \underbrace{\frac{\partial E_n}{\partial u_k^{(l+1)}}}_{\delta_k^{(l+1)}} \frac{\partial u_k^{(l+1)}}{\partial u_j^{(l)}}$$

$$\rightarrow \quad \delta_j^{(l)} = \sum_k \delta_k^{(l+1)} \frac{\partial u_k^{(l+1)}}{\partial u_j^{(l)}}$$

$$= \sum_k \delta_k^{(l+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(l)}} \sum_j w_{kj}^{(l+1)} z_j^{(l)}$$

$l+1$層から
l層が計算できる.

$$= \sum_k \delta_k^{(l+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(l)}} \sum_j w_{kj}^{(l+1)} f(u_j^{(l)})$$

$$= \sum_k \delta_k^{(l+1)} \left(w_{kj}^{(l+1)} f'(u_j^{(l)}) \right) \quad \cdots (4.12)$$

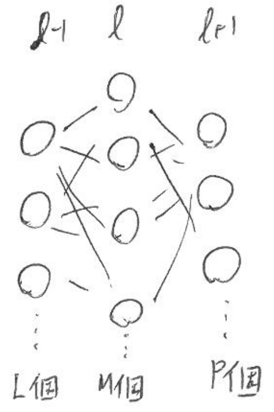
$$\therefore \frac{\partial E_n}{\partial w_{ji}^{(l)}} = \delta_j^{(l)} z_i^{(l-1)}$$

4.4.2

$$U^{(l)} = W^{(l)} Z^{(l)} + b^{(l)} 1_N^T \qquad (4.14a)$$

$[u_1 \cdots u_N]$ M, N

$(M \times N)$ $\quad$ $(M \times L)$ $(L \times N)$ $\quad$ $(M \times N)$



N: ミニバッチのサンプル数

$$Z^{(l)} = f^{(l)}(U^{(l)}) \quad \cdots \quad M \times N$$

要素ごとのかけ算

$$\Delta^{(l)} = f^{(l)\prime}(U^{(l)}) \odot (W^{(l+1)T} \Delta^{(l+1)}) \qquad (4.15)$$

$(M \times N)$ $\quad$ $(M \times N)$ $\quad$ $(M \times P)$ $(P \times N)$

(4.12) に対応

$$\partial W^{(l)} = \frac{1}{N} \Delta^{(l)} Z^{(l-1)T}$$

$(M \times L)$ $\quad$ $(M \times N)$ $(N \times L)$

(4.13) に対応

$$\partial b^{(l)} = \frac{1}{N} \Delta^{(l)} 1_N^T$$

4.5

順伝播 $\quad U^{(l)} = W^{(l)} Z^{(l-1)} + b^{(l)} 1_N^T$

$\qquad Z^{(l)} = \underbrace{f^{(l)}}_{\text{非線形}}(U^{(l)})$

逆伝播 $\quad \Delta^{(l)} = f^{(l)\prime}(U) \odot (W^{(l+1)T} \Delta^{(l+1)})$

線形 … 急速に発散/消失

⇓

勾配消失問題